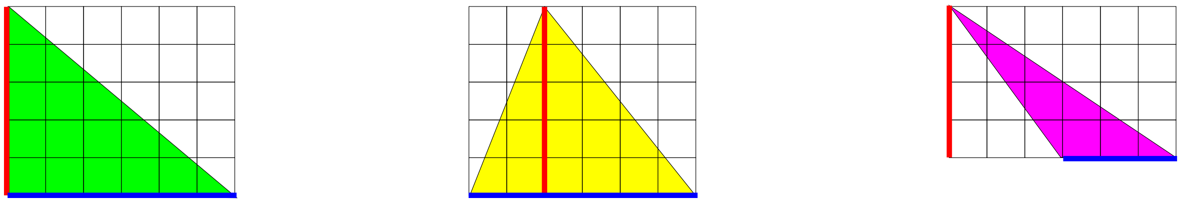
पाया आणि उंचीवरून त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ

गेल्या आठवड्यात आपण त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढायला शिकलो. यासारखी सोपी, सहज जमणारी पण गणिताच्या दृष्टीने अत्यंत महत्त्वाची संकल्पना आपल्याला समजली तर आपण अगदी अवघड संकल्पनेपर्यंतही पायरीपायरीने जाऊ शकतो. या आठवड्यात आपल्याला त्याचा अनुभव घ्यायचा आहे. पण त्यासाठी रोजची कृती रोज स्वतःची स्वतः करणे महत्त्वाचे आहे. गणितज्ञ किंवा वैज्ञानिक व्हायचे तर स्वतःचा स्वतः विचार करणे आणि शोध घेणे फार महत्त्वाचे आहे.

पुढील त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ चौकटी मोजून काढा.



प्रत्येक त्रिकोणाचा पाया कोणता, उंची कोणती हे बारकाईने पाहून ठरवा. आकृतीत निळ्या रेघेने पाया आणि लाल रेघेने उंची दाखविली आहे. (१/२ × पाया × उंची) या सूत्राने प्रत्येक त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा. चौकटी मोजून काढलेल्या क्षेत्रफळाइतकेच ते आले का?

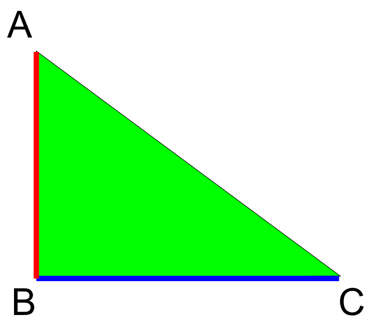
तुमच्या चौकटीच्या वहीत अनेक निरनिराळे काटकोन त्रिकोण, लघुकोन त्रिकोण व विशालकोन त्रिकोण काढा. चौकटी मोजून काढलेले क्षेत्रफळ आणि सूत्राने काढलेले क्षेत्रफळ सारखे येते का ते पहा.

त्रिकोणाची कोणतीही बाजू पाया म्हणून घेतली तर काय होईल? करून पहा. आपण उद्या चर्चा करू.

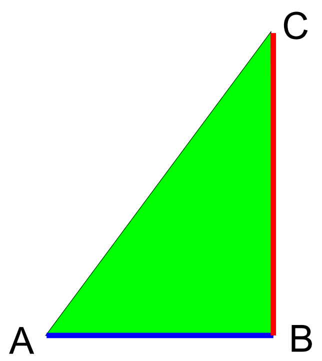
गीता महाशब्दे, नवनिर्मिती

निरनिराळा पाया आणि त्याच्याशी संबंधित उंची घेऊन क्षेत्रफळ काढू.

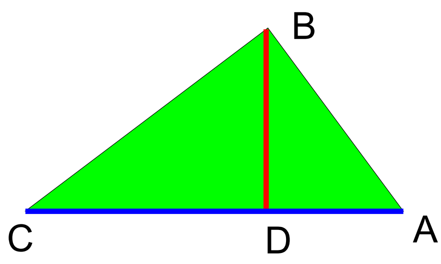
त्रिकोणाचा पाया जमिनीकडे आणि उंची सरळ उभी पाहण्याची सवय आपल्याला आहे. बाजू AB = ३ सेमी आणि बाजू AC = ४ सेमी असलेला काटकोन त्रिकोण आपण निरनिराळ्या पायावर उभा करू.



पाया = बाजू BC = ...सेमी
उंची = बाजू AB = ...सेमी
त्रिकोण ABC चे क्षेत्रफळ
=........ चौरस सेमी



पाया = बाजू ..... = ...सेमी
उंची = बाजू ...... = ...सेमी
त्रिकोण ABC चे क्षेत्रफळ
=.......... चौरस सेमी



पाया = बाजू ..... = ...सेमी
उंची = बाजू ...... = ...सेमी
त्रिकोण ABC चे क्षेत्रफळ
=.......... चौरस सेमी

तिसऱ्या पद्धतीने ठेवलेल्या त्रिकोणात पाया आणि उंची पट्टीने मोजा.
त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = १/२ × पाया × उंची हे सूत्र वापरून क्षेत्रफळ काढा.
गुणाकार करायला मोबाईलमधला कॅलक्युलेटर वापरलात तरीही चालेल.

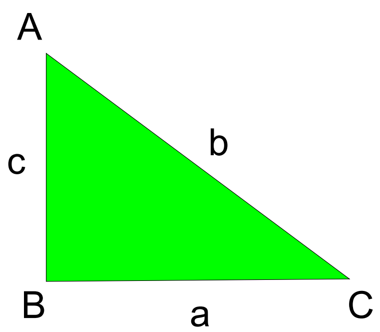
कोणत्याही पाया आणि उंचीने क्षेत्रफळ काढले तरीही उत्तर सारखेच येते हे तुमच्या लक्षात आले असेल.

आता वहीत एक वेगळा त्रिकोण काढा. वरीलप्रमाणे वेगवेगळा पाया घेऊन क्षेत्रफळ काढा.

आपण दोन पद्धतींनी त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढायला शिकलो, चौकटी मोजून आणि पाया–उंचीच्या सूत्राने. उद्या आपण तिसरी पद्धत शिकू.

गीता महाशब्दे, नवनिर्मिती

हेरॉनचे सूत्र



बाजू AB ३ सेमी आणि बाजू BC ४ सेमी असलेल्या काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ ६ चौसेमी आले. (कालची कृती पहा) पायथॅगोरसच्या सूत्राने बाजू AC ही ५ सेमी आहे हे तुम्हाला माहीत असेल. नाहीतर पट्टीने मोजून पहा.
त्रिकोणाच्या बाजूंच्या लांब्यांना a, b, c ही नावे देऊ.
म्हणजे $a = 4$, $b = 5$, $c = 3$ सेमी.
या त्रिकोणाची परिमिती = $a + b + c = 4 + 5 + 3 = 12$ सेमी
अर्ध्या परिमितीला **s** म्हणू. **s** = 6

आता त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळासाठी हेरॉनचे सूत्र :

$$\text{त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचा वर्ग} = s \times (s-a) \times (s-b) \times (s-c)$$
$$= 6 \times (6-4) \times (6-5) \times (6-3)$$
$$= 6 \times 2 \times 1 \times 3$$
$$= 36$$

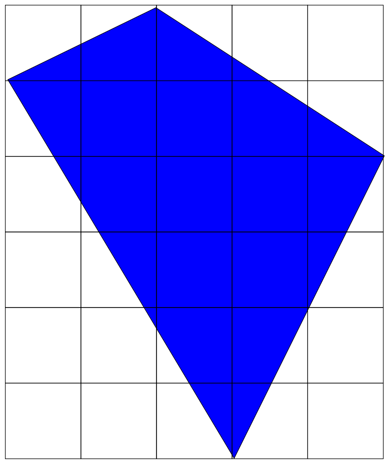
त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = ३६ चे वर्गमूळ = ६ चौरस सेमी

तुमच्या चौकटीच्या वहीत कोणताही त्रिकोण काढा. त्याच्या बाजू पट्टीने मोजा. या बाजू दशांशात असू शकतील. चौकटी मोजून, पाया–उंचीचे सूत्र वापरून आणि हेरॉनचे सूत्र वापरून क्षेत्रफळ काढा. तीनही प्रकारे तुम्हाला जवळपास सारखे उत्तर मिळेल. गुणाकार आणि वर्ग करायला मोबाईलमधला कॅलक्युलेटर वापरा.

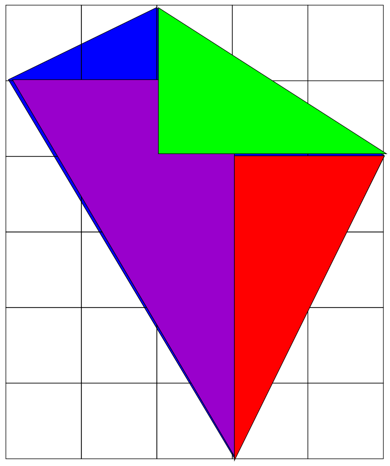
गीता महाशब्दे, नवनिर्मिती

य

चौकोनाचं क्षेत्रफळ

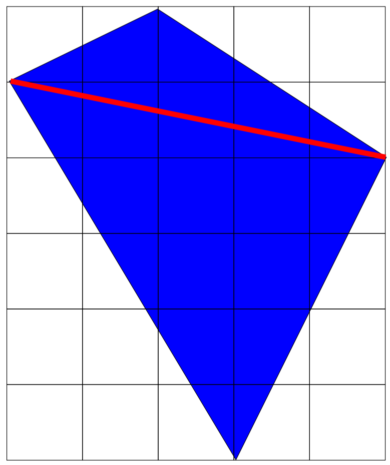


चौकटीच्या कागदावर कोणताही एक चौकोन काढा.
त्याचे शिरोबिंदू चौकटींच्या कोपऱ्यावर येतील असा.
म्हणजे क्षेत्रफळ मोजायला सोपे जाईल.



यात निरनिराळे काटकोन त्रिकोण कसे बसलेत ते
पाहिले तर तुम्हाला चौकोनाचे क्षेत्रफळ मोजता येईल.

निळा त्रिकोण = १
जांभळा भाग = ७.५ चा अख्खा त्रिकोण – १ = ६.५
हिरवा त्रिकोण = ३
लाल त्रिकोण = ४
एकूण १४.५

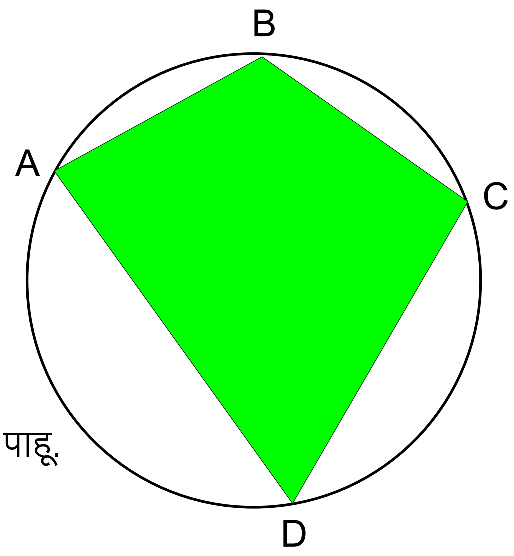


आता तुमच्या मूळच्या चौकोनाचा एक कर्ण जोडा.
त्याचे दोन त्रिकोण होतील.
पाया आणि उंची मोजून दोघांचे क्षेत्रफळ काढा
आणि एकत्र मिळवा. ते १४.५ च्या जवळपास येईल.

याप्रमाणे आणखी एका चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.

गीता महाशब्दे, नवनिर्मिती

वर्तुळातल्या चौकोनाचे विस्मयकारक गुण



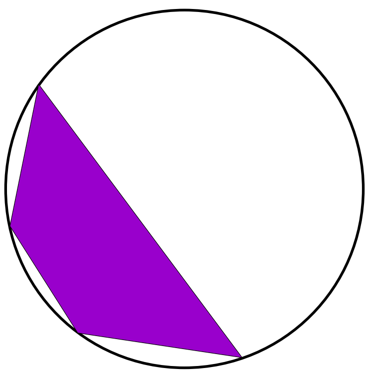
कोणतेही एक वर्तुळ काढा.
या वर्तुळावर A, B, C, D हे कोणतेही चार बिंदू घ्या.
हे बिंदू जोडून एक चौकोन तयार करा. हा चौकोन वर्तुळात बरोबर बसलेला आहे.

अशा चौकौनांचे काही विस्मयकारक गुणधर्म असतात.

कोनमापकाने कोन मोजून यातला एक गुणधर्म आपण तपासून पाहू.

कोन ABC =
कोन ADC =
कोन ABC + कोन ADC =
कोन BAC =
कोन BCD =
कोन BAC + कोन BCD =

समोरासमोरील कोनांची बेरीज १८० अंशाच्या आसपास आली का? अशा चक्रीय चौकोनाच्या समोरासमोरील कोनांची बेरीज १८० अंश असते. पुढील चौकोनासाठी हा गुणधर्म तपासून पहा.

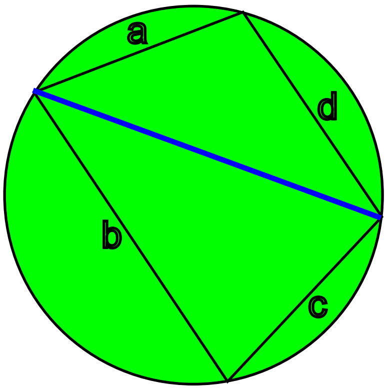


अशा चौकोनाच्या क्षेत्रफळाबाबतचे एक महत्त्वाचे सूत्र आपण उद्या पाहणार आहोत.

गीता महाशब्दे, नवनिर्मिती

ब्रह्मगुप्ताचे सूत्र

सुमारे १४०० वर्षांपूर्वी ब्रह्मगुप्त या भारतीय गणितज्ञानं जगाला एक सूत्र दिलं. वर्तुळाच्या आत बसणाऱ्या चौकोनाच्या क्षेत्रफळाचं सूत्र. अशा चौकोनाला मराठीत चक्रीय चौकोन आणि इंग्रजीत cyclic quadrilateral म्हणतात. याचे चारही शिरोबिंदू एका वर्तुळावर असतात.



तुमच्या चौकटीच्या कागदावर कोणत्याही मापाचे एक वर्तुळ काढा. वरीलप्रमाणे एक चौकोन काढा.

ब्रह्मगुप्ताचे सूत्र वापरून क्षेत्रफळ :
चौकोनाची परिमिती = a + b + c + d मोजा.
s = अर्धपरिमिती = परिमिती ÷ २

चौकोनाच्या क्षेत्रफळाचा वर्ग = (s-a) x (s-b) x (s-c) x (s-d)

या चौकोनाचं क्षेत्रफळ दोन त्रिकोणी भाग करून, पाया उंची मोजून सूत्राने काढा. त्याचा वर्ग करा. ब्रह्मगुप्ताच्या सूत्राने काढलेल्याइतकाच तो आला का?

आपण दोन दिवसांपूर्वी पाहिलेले हेरॉनचे सूत्र म्हणजे ब्रह्मगुप्ताच्या सूत्राची एक स्पेशल केस आहे. चौकोनाची बाजू d जेव्हा शून्य होईल, तेव्हा तो चौकोन न राहता त्याचा त्रिकोण होईल. ब्रह्मगुप्ताच्या सूत्रात d च्या जागी शून्य घातला की हेरॉनचे सूत्र मिळते का?

ब्रह्मगुप्ताचे सूत्र हा गणितातला एक फार सुंदर आविष्कार आहे. आजसुद्धा अनेक गणितज्ञ त्याने चकित होतात.

गीता महाशब्दे, नवनिर्मिती